Notes didàctiques

D'acord amb l'orientació que volem donar a **SCM/Notícies**, que ha de recollir els interessos i inquietuds de les lectores i els lectors, s'inclou seguidament una reflexió de caràcter didàctic sobre el càlcul de límits que ens ha enviat J. Gas.

Ens podem adonar que la situació que es planteja se'ns presenta quan volem raonar quines són les asímptotes d'una hipèrbola. Si no sou prou conscients de la raó per la qual en surten dues de diferents o, altrament, si els vostres llibres de text no ho comenten prou explícitament, convé que llegiu aquest article.

Una errada molt freqüent en el càlcul de límits

JORDI GAS I RIERA
Professor Numerari de Matemàtiques
a l'I.P.F.P. de Tortosa (Tarragona)

Hi ha una errada que es comet sovint quan es calcula "mecànicament" el límit d'una funció quan $x \to -\infty$, si apareix alguna arrel quadrada en l'expressió de la funció, sobretot en indeterminacions de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Com que al llarg dels divuit anys que porto com a docent no he vist cap llibre de text on es tingui en compte aquesta errada, crec és d'interès comentar-la.

Com sabem, per calcular un límit d'aquest tipus es divideix el numerador i el denominador per la potència de major grau.

Així, per exemple:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x+1}{2x+\sqrt{4x^2-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{7x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{\sqrt{4x^2-3x}}{x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{7x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7+\frac{1}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{3}{x}}} = \frac{7+0}{2+\sqrt{4}} = \frac{7}{4}$$

... però aquest no és pas el valor correcte del límit.

On és l'errada? Aquesta es troba quan s'introdueix la x dins l'arrel quadrada, ja que, com que tendeix a $-\infty$, x pren valors negatius i, per tant, per arreglar la fracció $\frac{\sqrt{4x^2-3x}}{x}$, que també pren valors negatius, ja que considerem la determinació positiva de l'arrel, s'ha de posar el signe menys davant de l'expressió radical: $-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}$.

Per tant, el procés per calcular correctament el límit és el següent:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x+1}{2x+\sqrt{4x^2-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{7x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{\sqrt{4x^2-3x}}{x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{7x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7+\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{3}{x}}} = \frac{7+0}{2-\sqrt{4}} = \frac{7}{0} = \infty$$

Per determinar el signe de l'∞ del límit, cal adonar-se que, si x és un nombre negatiu, l'expressió $2-\sqrt{4-\frac{3}{x}}$ és negativa.

Arribem, doncs, al resultat correcte del límit: $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x+1}{2x+\sqrt{4x^2-3x}} = -\infty$.

Com es pot apreciar, la influència de l'errada que comentem sobre el resultat del límit és molt gran.

És important tenir en compte aquesta observació per a calcular, per exemple, les asímptotes horitzontals de la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ per tal de fer la seva gràfica. En calcular el límit, s'ha de distinguir segons $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, ja que els resultats són diferents.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1.$$

Per tant, per a $x \to +\infty$, la funció té com a asímptota horitzontal la recta $y = 1$. Per altra banda,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-4x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1$$

Per tant per $x \to -\infty$ la funció té com a asímptota horitzontal la recta $y = -1$. Així, doncs, el fet de calcular amb cura el límit fa veure que aquesta funció té dues asímptotes horitzontals diferents, una quan $x \to +\infty$ i una altra quan $x \to -\infty$.

Problemes

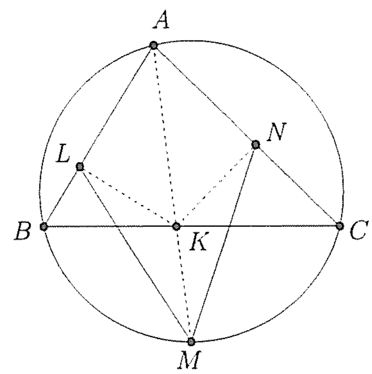
Problemes proposats

A9. Tenim donats al pla un triangle $A_1A_2A_3$ i un punt P_0. Definim $A_s = A_{s-3}$ per tot $s \geq 4$. Construïm una successió de punts $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ de manera que P_k és, per $k = 1, 2, \ldots$, la imatge de P_{k-1} en un gir antihorari de centre A_k i amplitud 120° Demostreu que si $P_{1986} = P_0$, llavors el triangle $A_1A_2A_3$ és equilàter.

A10. Sigui $p_n(k)$ el nombre de permutacions del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tenen exactament k elements fixos. Demostreu que

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!\,.$$

A11. En un triangle acutangle ABC la bisectriu interior de l'angle A talla el costat BC al punt K i el cercle circumscrit al punt M. Des del punt K es tracen perpendiculars KL i KN a AB i AC, respectivament, on posem L i N per a designar els peus de les esmentades perpendiculars. Demostreu que el quadrilàter $ALMN$ i el triangle ABC tenen la mateixa àrea.



A12. Sigui $n \geq 3$ un enter. Demostreu que existeix un conjunt de n punts al pla tal que la distància entre cada parell de punts del conjunt és irracional, i que cada terna de punts del conjunt determina un triangle no degenerat d'àrea racional.

Comentari. A l'enunciat del problema **A7** (vegeu **SCM/Notícies/**1), cal afegir-hi el paràgraf següent: "En les competicions esportives, s'anomena *mitjana de gols fallats* el quocient entre el nombre de gols fallats i el nombre total de llançaments realitzats; en aquest problema la mitjana es dóna *arrodonida* amb tres decimals."